

文章编号: 1000-7598 (2010) 增刊 1-0079-07

考虑加载过程的真空预压轴对称解析解

彭 劼^{1,2}, 董江平³, 宋恩润^{1,2}, 洪 雷^{1,2}

(1. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098; 2. 河海大学 岩土工程科学研究所, 南京 210098;
3. 中交上航局航道建设有限公司, 浙江 宁波 315200)

摘 要: 本文在砂井地基轴对称等应变方程的基础上, 推导了真空预压荷载下的轴对称孔压、固结度解析解, 该解析解利用函数模拟孔压在地表的初始条件, 以考虑真空荷载的施加过程, 解决了以往真空预压解孔压边界条件和初始条件在地表处的矛盾。同时也可考虑涂抹和井阻等因素, 更加接近实际工程情况。通过例题与其他解答及数值解进行了验证、比较, 证明了该解答的适用性, 可进一步用于实际工程的设计计算。

关 键 词: 砂井地基; 真空预压; 轴对称解析解; 孔压; 固结度

中图分类号: TU 441

文献标识码: A

Axisymmetric analytical solution of vacuum preload considering the loading process

PENG Jie^{1,2}, DONG Jiang-ping³, SONG En-run^{1,2}, HONG Lei^{1,2}

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098; 2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098; 3. Sdc Waterway Construction Co., Ltd., Ningbo, Zhejiang 315200, China)

Abstract: On the basis of axisymmetric equal strain equation of sand drain foundation, the axisymmetric analytical solution of the pore water pressure and consolidation degree under vacuum preloading were derived in this paper. The effect of vacuum loading speed was considered by the function, which was used to simulate the initial condition of surface pore water pressure, and resolved the contradiction of pore water pressure boundary condition and initial condition at the surface. Well resistance and smear were also considered in the analytical solution. With the other answers as well as the numerical solution, the analytical solution has been verified through an example calculation, and it can be further applied in practical engineering design.

Key word: sand drain foundation; vacuum preload; axisymmetric analytical solution; pore water pressure; consolidation degree

1 引 言

对砂井地基上堆载作用的解析解研究有较长的历史, 也有较多成果。Carrillo 最早对砂井地基固结问题进行了研究, 他提出了轴对称固结等竖向应变和自由应变得概念, 一直为后来的学者们所沿用。Barron 求解了理想井的两种应变条件的固结解。此后, Hansbo、钱家欢、谢康和、赵维炳、Tang Xiaowu、Yoshikuni、王瑞春等进一步发展了砂井固结解析解的研究^[1], 到目前为止, 砂井固结的解析解可以考虑变荷载施加、井阻、涂抹、土体黏弹性、以及某些情况下的土体分层^[2]。

真空预压的固结解析解研究则相对较少。阎澍

旺、陈环研究了负压下的一维固结方程解, 即在薄膜覆盖面积较大时, 将其简化为一维问题。钱家欢提出了真空预压砂井地基固结分析的半解析法, 孔隙水压力用解析公式计算, 位移则用数值法求解。赵维炳随后作了进一步的发展, 使之也适用于堆载预压和成层地基情况, 同时也可考虑土的粘弹性、井阻、涂抹。董志良推导了砂井地基正负压联合的固结解析解, 其分别求出瞬时作用的正、负压下的径向、竖向解, 然后将它们按照各种情况进行组合, 从而得出了真空-堆载联合预压下的砂井地基固结度计算公式, 并且考虑了井阻和涂抹作用^[3]。

本文对真空预压的轴对称砂井地基固结解进行了研究, 相较于以前的解答, 本文解考虑了真空

收稿日期: 2010-04-22

基金项目: 中央高校基本科研业务费(No. 2009B13014); 中交上航局航道建设有限公司专项科研基金资助。

第一作者简介: 彭劼, 男, 1971 年生, 博士, 副教授, 从事软基处理及桩基础等研究工作。E-mail: peng-jie@hhu.edu.cn

荷载的施加时间,更加接近实际工程情况。

2 考虑加载过程的真空预压孔压解析解

(1) 基本假定及定解方程

计算简图如图1所示。图中, H 为砂井地基的软土层厚度即砂井长度; k_h 、 k_v 分别为未扰动区土体水平向及竖向渗透系数; k_s 为涂抹区土体水平向渗透系数, $k_s \leq k_h$; k_w 为砂井渗透系数; r_w 为砂井半径; r_s 为涂抹区半径; r_e 为砂井影响区半径; $q(t)$ 为随时间变化的均布荷载; r 、 z 为径向及竖向坐标。

砂井地基轴对称问题的基本方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

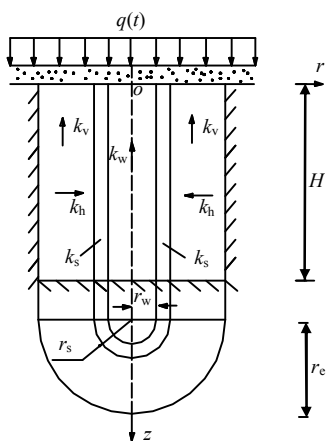


图1 计算简图

Fig.1 Calculation diagram

对于真空预压而言,其方程同上,基本假定变为

①等应变条件成立,即砂井地基中无侧向变形,同一水平面任一点的垂直变形相等。

②砂井内孔压沿径向的变化可不计。任一深度 z 处从土体中沿井周流入砂井的水量等于砂井中向上水流的增量,即下式成立:

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} \Big|_{r=r_w} + \frac{r_w k_w}{2 k_s} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

式中: u_s 指涂抹区孔压。

因为 $u_s|_{r=r_w} = u_w$, $u_s|_{r=r_s} = u|_{r=r_s}$ (3)

且有 $k_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = k_h \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_s}$ (4)

③除了渗透系数外,砂井井料及涂抹区的其他性质同天然地基。

④以往的真空预压解,孔压边界条件和初始条件在地表处矛盾,本文采用式(5)表示孔压在地表的初始条件,以模拟真空荷载的作用,并可考虑真空荷载的施加过程即地表处孔压随时间的变化。

$$u = -p_0 [1 - e^{-\alpha t}] \quad (5)$$

式中: p_0 为设计真空度; t 为时间。取合适的 α 值,可以使真空加载曲线很好地拟合真空荷载的实际施加情况。

⑤砂井顶面完全透水而砂井底部完全不透水。

则本文的真空预压求解条件汇总如下:

固结微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_h}{\gamma_w} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) &= m_v \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right), \\ (r_s \leq r \leq r_e) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_{vs}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + \frac{k_{hs}}{\gamma_w} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} \right) &= m_{vs} \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right), \\ (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} z=0, u &= u_s = u_w = -p_0 [1 - e^{-\alpha t}] \\ z=H, \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u_s}{\partial z} = \frac{\partial u_w}{\partial z} = 0 \\ z=r_e, \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

连续条件为

$$\left. \begin{aligned} r=r_w; u_w &= u_s \\ r=r_w; \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{r_w k_w}{2 k_{hs}} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} &= 0 \\ r=r_s; u &= u_s \\ r=r_s; k_h \frac{\partial u}{\partial r} &= k_{hs} \frac{\partial u_s}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

初始条件:

$$t=0; u = u_w = u_s = 0 \quad (10)$$

(2) 方程的求解

为了求 $u(r, z, t)$ 、 $u_s(r, z, t)$, 首先将边界条件齐次化, 令

$$\left. \begin{aligned} u(r, z, t) &= \bar{W}(r, z, t) - P_0 [1 - e^{-\alpha t}] \\ u_s(r, z, t) &= \bar{W}_s(r, z, t) - P_0 [1 - e^{-\alpha t}] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将式 (11) 代入 (6)~(8), 可知 $\bar{W}(r, z, t)$ 、 $\bar{W}_s(r, z, t)$ 满足的是非齐次方程, 边界条件则是齐次的。

引入线性偏微分算子记号, 并将 $\bar{W}(r, z, t)$ 、 $\bar{W}_s(r, z, t)$ 代入, 可得

$$\left. \begin{aligned} L(\bar{W}) &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} - C_v \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} - \\ &C_h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial r^2} \right) = \alpha P_0 e^{-\alpha t} \\ L_s(\bar{W}_s) &= \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial t} - C_{vs} \frac{\partial^2 \bar{W}_s}{\partial z^2} - \\ &C_{hs} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{W}_s}{\partial r^2} \right) = \alpha P_0 e^{-\alpha t} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: C_h 、 C_v 等为水平向和竖向固结系数。

式 (12) 的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} \Big|_{z=0} &= \bar{W}_s \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \Big|_{z=H} &= \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0; \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

连续条件:

$$\left. \begin{aligned} r=r_w \rightarrow \bar{W}_s \Big|_{r=r_w} &= \bar{W}_w \Big|_{r=r_w} = 0 \\ r=r_w \rightarrow \left(\frac{\partial \bar{W}_s}{\partial r} + \frac{r_w k_w}{2k_{hs}} \frac{\partial^2 \bar{W}_w}{\partial z^2} \right) \Big|_{r=r_w} &= 0 \\ r=r_s \rightarrow \bar{W} \Big|_{r=r_s} &= \bar{W}_s \Big|_{r=r_s} \\ r=r_s \rightarrow k_h \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} \Big|_{r=r_s} &= k_{hs} \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial r} \Big|_{r=r_s} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

初始条件:

$$\bar{W} \Big|_{t=0} = \bar{W}_s \Big|_{t=0} = 0 \quad (15)$$

利用求解非齐次偏微分方程混合问题求解的“冲量定理法”^[4], 将方程式(12)的右边函数 $f(t) = \alpha P_0 e^{-\alpha t}$ 视为一系列脉冲函数 $f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$ 作用从 0 到 t 的叠加。在边界条件与连续条件与式 (13)、(14) 相同的条件下, 求解方程:

$$\left. \begin{aligned} L(V) &= f(\tau) \delta(t-\tau) \\ L_s(V_s) &= f(\tau) \delta(t-\tau) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在初始条件:

$$V \Big|_{t=0} = V_s \Big|_{t=0} = 0 \quad (17)$$

下的基本解 $V(r, z, t; \tau)$ 与 $V_s(r, z, t; \tau)$, 化为以下等价的定解问题:

$$L(V) = 0; L_s(V_s) = 0 \quad (18)$$

边界与连续条件式 (13)、(14) 一样为齐次的。

初始条件为

$$V \Big|_{t-\tau=0} = f(\tau); V_s \Big|_{t-\tau=0} = f(\tau) \quad (19)$$

的问题。求出基本解 $V(r, z, t; \tau)$ 、 $V_s(r, z, t; \tau)$ 后, 即可通过积分求得

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(r, z, t) &= \int_0^t V(r, z, t; \tau) d\tau \\ \bar{W}_s(r, z, t) &= \int_0^t V_s(r, z, t; \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

下面先求基本解 $V(r, z, t; \tau)$ 、 $V_s(r, z, t; \tau)$ 。

方程:

$$\left. \begin{aligned} L(V) &= \frac{\partial V}{\partial t} - C_v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - C_h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = 0 \\ L_s(V_s) &= \frac{\partial V_s}{\partial t} - C_{vs} \frac{\partial^2 V_s}{\partial z^2} - C_{hs} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial r^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} V \Big|_{z=0} &= V_s \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=H} &= \frac{\partial V_s}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

连续条件:

$$\left. \begin{aligned} V_s \Big|_{r=r_w} &= V_w \Big|_{r=r_w} = 0; \quad \left(\frac{\partial V_s}{\partial r} + \frac{r_w k_w}{2k_{hs}} \frac{\partial^2 V_w}{\partial z^2} \right) \Big|_{r=r_w} = 0; \\ V \Big|_{r=r_s} &= V_s \Big|_{r=r_s}; \quad k_h \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = k_{hs} \frac{\partial V_s}{\partial r} \Big|_{r=r_s} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

初始条件:

$$V \Big|_{t-\tau=0} = V_s \Big|_{t-\tau=0} = f(\tau) = \alpha P_0 e^{-\alpha \tau} \quad (24)$$

用分离变量法, 令

$$\left. \begin{aligned} V(r, z, t; \tau) &= R(r) Z(z) T(t) \\ V_s(r, z, t; \tau) &= R_s(r) Z_s(z) T_s(t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中: r 、 z 、 t 为自变量。

经过两次变量分离, 并利用式(22)可得到 $Z(z)$ 、 $Z_s(z)$ 为相同形式的正弦函数, $R(r)$ 、 $R_s(r)$ 为 0 阶

第一类与第二类贝塞尔函数的线性组合; $T(t)$ 、 $T_s(t)$ 为负幂的指数函数。于是有

$$\left. \begin{aligned} V &= \left[C J_0(\alpha_{mn} r) + D N_0(\alpha_{mn} r) \right] \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\lambda_1^2 t} \\ V_s &= \left[A J_0(\alpha_{smn} r) + B N_0(\alpha_{smn} r) \right] \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\lambda_{1s}^2 t} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\text{式中: } M = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 &= C_v \left(\frac{M}{H}\right)^2 + C_h \alpha_{mn}^2 \\ \lambda_{1s}^2 &= C_{vs} \left(\frac{M}{H}\right)^2 + C_{hs} \alpha_{smn}^2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

于是特征值 λ_1^2 、 λ_{1s}^2 决定于 α_{mn}^2 、 α_{smn}^2 。

C 、 D 、 A 、 B 为任意常数; α_{mn} 、 α_{smn} 为与 $m=0, 1, 2, \dots$ 有关特征值。

由连续条件式(23)给出:

$$e^{-\lambda_1^2 t} = e^{-\lambda_{1s}^2 t} \quad \text{即 } \lambda_1^2 = \lambda_{1s}^2 \quad (29)$$

于是可得 α_{mn} 、 α_{smn} 满足的第一个方程:

$$\left. \begin{aligned} C_v \left(\frac{M}{H}\right)^2 + C_h \alpha_{mn}^2 &= C_{vs} \left(\frac{M}{H}\right)^2 + C_{hs} \alpha_{smn}^2 \\ \text{或 } C_h \alpha_{mn}^2 - C_{hs} \alpha_{smn}^2 &= (C_{vs} - C_v) \left(\frac{M}{H}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

若 $C_{vs} = C_v$, $C_{hs} = C_h$, 则有 $\alpha_{mn} = \alpha_{smn}$ 。

利用边界、连续条件式(22)、(23)并由第一、二类贝塞尔函数的求导公式:

$$\left. \begin{aligned} J'_0(x) &= J_1(x), \frac{d}{dr} J_0(\alpha_{mn} r) = \alpha_{mn} J_1(\alpha_{mn} r) \\ N'_0(x) &= N_1(x), \frac{d}{dr} N_0(\alpha_{smn} r) = \alpha_{smn} N_1(\alpha_{smn} r) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

可以得到以下关于 C 、 D 、 A 、 B 的齐次线性方程组:

$$\left. \begin{aligned} D &= -C \frac{J_1(\alpha_{mn} r_e)}{N_1(\alpha_{mn} r_e)} \\ A J_0(\alpha_{smn} r_w) + B N_0(\alpha_{smn} r_w) &= 0 \\ C J_0(\alpha_{mn} r_s) + D N_0(\alpha_{mn} r_s) &= \\ &= A J_0(\alpha_{smn} r_s) + B N_0(\alpha_{smn} r_s) \\ k_h \alpha_{mn} [C J_1(\alpha_{mn} r_s) + D N_1(\alpha_{mn} r_s)] &= \\ k_{hs} \alpha_{smn} [A J_1(\alpha_{smn} r_s) + B N_1(\alpha_{smn} r_s)] &= \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

上述齐次线性方程组取得非 0 解的充要条件是其系数行列式为 0, 经过化简可得到以下第二个特征方程:

$$k_h \alpha_{mn} \left[J_1(\alpha_{mn} r_s) - \frac{J_1(\alpha_{mn} r_e)}{N_1(\alpha_{mn} r_e)} N_1(\alpha_{mn} r_s) \right] = \quad (33)$$

$$k_{hs} \alpha_{smn} [f J_1(\alpha_{smn} r_s) + g N_1(\alpha_{smn} r_s)]$$

联立式(33)和式(30), 即可确定 α_{mn} 、 α_{smn} 。

由式(32)将 D 、 A 、 B 用 C 表示, 令

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{J_0(\alpha_{mn} r_s) - \frac{J_1(\alpha_{mn} r_e)}{N_1(\alpha_{mn} r_e)} N_0(\alpha_{mn} r_s)}{J_0(\alpha_{smn} r_s) - \frac{J_0(\alpha_{smn} r_w)}{N_0(\alpha_{smn} r_w)} N_0(\alpha_{smn} r_s)} \\ g &= -f \frac{J_0(\alpha_{smn} r_w)}{N_0(\alpha_{smn} r_w)} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

于是得

$$\left. \begin{aligned} V &= C \left[J_0(\alpha_{mn} r) - \frac{J_1(\alpha_{mn} r_e)}{N_1(\alpha_{mn} r_e)} N_0(\alpha_{mn} r) \right] \cdot \\ &\quad \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\lambda_1^2 t}, \quad (r_s \leq r \leq r_e) \\ V_s &= C [f J_0(\alpha_{smn} r) + g N_0(\alpha_{smn} r)] \cdot \\ &\quad \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\lambda_1^2 t}, \quad (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

若引入贝塞尔函数的线性组合函数记号:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_i(\alpha_{mn} r) &= J_i(\alpha_{mn} r) - \frac{J_1(\alpha_{mn} r_e)}{N_1(\alpha_{mn} r_e)} N_i(\alpha_{mn} r), \quad (i=0, 1) \\ V_i(\alpha_{smn} r) &= f J_i(\alpha_{smn} r) + g N_i(\alpha_{smn} r), \quad (i=0, 1) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} V &= C \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\lambda_1^2 t}, \quad (r_s \leq r \leq r_e) \\ V_s &= C V_0(\alpha_{smn} r) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\lambda_1^2 t}, \quad (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

利用叠加原理, 将式(37)中的 C 换成 C_{mn} 后,

有

$$\left. \begin{aligned} V &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) \cdot \\ &\quad e^{-\left(C_h \alpha_{mn}^2 + C_v \frac{M^2}{H^2}\right)t}, \quad (r_s \leq r \leq r_e) \\ V_s &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) V_0(\alpha_{smn} r) \cdot \\ &\quad e^{-\left(C_h \alpha_{mn}^2 + C_v \frac{M^2}{H^2}\right)t}, \quad (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

为了确定系数 C_{mn} , 由初始条件式(24)有

$$\left. \begin{aligned} \alpha P_0 e^{-\alpha \tau} &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) e^{-\lambda_1^2 \tau} \\ (r_s \leq r \leq r_e) \\ \alpha P_0 e^{-\alpha \tau} &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) V_0(\alpha_{smn} r) e^{-\lambda_1^2 \tau} \\ (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

将左式展开为正弦级数, 比较系数可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\alpha P_0 e^{-\alpha \tau}}{M} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) e^{-\lambda_1^2 \tau}, (r_s \leq r \leq r_e) \\ \frac{2\alpha P_0 e^{-\alpha \tau}}{M} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} V_0(\alpha_{smn} r) e^{-\lambda_1^2 \tau}, (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

再利用在 $[r_w, r_e]$ 上 $\bar{W}_0$ 、 V_0 的带权 r 正交性, 可以求得 C_{mn} :

$$C_{mn} = \frac{2\alpha P_0 e^{-\alpha \tau}}{M} C'_{mn} e^{\lambda_1^2 \tau} \quad (41)$$

$$C'_{mn} = \frac{\int_{r_w}^{r_s} r V_0(\alpha_{smn} r) dr + \int_{r_s}^{r_e} r W_0(\alpha_{mn} r) dr}{\int_{r_w}^{r_s} r V_0^2(\alpha_{smn} r) dr + \int_{r_s}^{r_e} r W_0^2(\alpha_{mn} r) dr} \quad (42)$$

因此, 可求得基本解 V 、 V_s 如下:

$$\left. \begin{aligned} V(r, z, t; \tau) &= 2\alpha P_0 e^{-\alpha \tau} \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \cdot \\ &\quad \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) e^{-\lambda_1^2(t-\tau)}, (r_s \leq r \leq r_e) \\ V_s(r, z, t; \tau) &= 2\alpha P_0 e^{-\alpha \tau} \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \cdot \\ &\quad \bar{W}_0(\alpha_{smn} r) e^{-\lambda_1^2(t-\tau)}, (r_w \leq r \leq r_s) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

式中: $M = \frac{\pi}{2} + m\pi$, ($m = 0, 1, 2, \dots$); $\lambda_1^2 = C_h \alpha_{mn}^2 +$

$$C_v \left(\frac{M}{H}\right)^2.$$

将式(43)分别代入式(20), 对 τ 积分, 利用

$$\int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{-\lambda_1^2(t-\tau)} d\tau = e^{-\lambda_1^2 t} \int_0^t e^{(\lambda_1^2 - \alpha)\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda_1^2 - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t}] \quad (44)$$

于是求得

$$\begin{aligned} \bar{W}(r, z, t) &= 2\alpha P_0 \cdot \\ &\sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{\lambda_1^2 - \alpha} \frac{1}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) W_0(\alpha_{mn} r) [e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t}] \\ \bar{W}_s(r, z, t) &= 2\alpha P_0 \cdot \\ &\sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{\lambda_1^2 - \alpha} \frac{1}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) W_0(\alpha_{smn} r) [e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t}] \end{aligned} \quad (45)$$

(3) 求 $u(r, z, t)$ 和 $u_s(r, z, t)$

由式(11)求得

$$\left. \begin{aligned} u(r, z, t) &= \bar{W}(r, z, t) - P_0 [1 - e^{-\alpha t}] \\ u_s(r, z, t) &= \bar{W}_s(r, z, t) - P_0 [1 - e^{-\alpha t}] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

式中: $\bar{W}(r, z, t)$ 、 $\bar{W}_s(r, z, t)$ 已求出见式(45)。

(4) 求 $u_w(r, z, t)$, ($0 \leq r \leq r_w$)

$$\text{根据式(2), 由式(11)求出 } \left. \frac{\partial u_s}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \left. \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial r} \right|_{r=r_w}$$

由式(45)并利用贝塞尔函数的求导公式有

$$\begin{aligned} \frac{dV_0(\alpha_{smn} r)}{dr} &= \alpha_{smn} V_1(\alpha_{smn} r) = \\ &\alpha_{smn} [fJ_1(\alpha_{smn} r) + gN_1(\alpha_{smn} r)] \end{aligned} \quad (47)$$

可知

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_s}{\partial r} \right|_{r=r_w} &= 2\alpha P_0 \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \cdot \\ &\frac{\alpha_{smn}}{\lambda_1^2 - \alpha} V_1(\alpha_{smn} r_w) [e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t}] \end{aligned} \quad (48)$$

由式(2), 则有

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = -\frac{2k_{hs}}{r_w k_w} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (49)$$

对 z 积分一次得

$$\frac{\partial u_w}{\partial z} = -\frac{2k_{hs}}{r_w k_w} \int \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} dz + \varphi_1(r, t) \quad (50)$$

再积分一次得

$$\begin{aligned} u_w(r, z, t) &= -\frac{2k_{hs}}{r_w k_w} \int \left[\int \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} dz \right] dz + \\ &\varphi_1(r, t) z + \varphi_2(r, t) \end{aligned} \quad (51)$$

利用边界条件式(8)中第1、3式, 有

$$\varphi_2(r, t) = -P_0 [1 - e^{-\alpha t}] \quad (52)$$

为求 $\varphi_1(r, t)$, 先将式(47)代入式(49)完成积分:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} dz &= -2\alpha P_0 \\ &\sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{H}{M^2} \cos\left(\frac{M}{H} z\right) V_1(\alpha_{smn} r_w) [e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t}] \end{aligned} \quad (53)$$

取 $z=H$, 利用边界条件式(8), 可得

$$\left\{ \frac{4\alpha P_0 k_s}{r_w k_w} \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{H}{M^2} \cos\left(\frac{M}{H} Z\right) \frac{\alpha_{smn}}{\lambda_1^2 - \alpha} \right. \\ \left. V_1(\alpha_{smn} r_w) \left[e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t} \right] \right\} \Big|_{Z=H} + \varphi_1(r, t) = 0 \\ \because \cos\left(\frac{M}{H} Z\right) \Big|_{Z=H} = \cos M = 0 \quad (54)$$

于是求得 $\varphi_1(r, t) = 0$ ，最后可得

$$u_w(r, z, t) = -p_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \right] - \frac{2k_{hs}}{r_w k_w} \int \left[\int \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} dz \right] = \\ -p_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \right] + \frac{4\alpha p_0 k_{hs}}{r_w k_w} \cdot \\ \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{H}{M^3} \sin\left(\frac{M}{H} Z\right) \frac{\alpha_{smn}}{\lambda_1^2 - \alpha} V_1(\alpha_{smn} r_w) \left[e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t} \right] \quad (55)$$

3 平均孔压 $\bar{u}^e(t)$ 和平均固结度 $\bar{U}^e(t)$ 的计算

(1) 平均超静孔压 $\bar{u}^e(t)$

$$\text{定义: } \bar{u}^e(t) = \frac{1}{v_0} \iiint_{\Omega} u(\vec{r}; t) dv \quad (56)$$

式中: v_0 为所取体积; $u(r; t)$ 为域 Ω 内的超静孔压, 它不但是时间的函数, 也是位置的函数。由于是轴对称问题, 于是式(73)的体积分可化为以下二重积分:

$$\bar{u}^e(t) = \frac{1}{v_0} \int_0^H dz \left[\int_{r_s}^{r_e} 2\pi r u(r, z, t) dr + \int_{r_w}^{r_s} 2\pi r u_s(r, z, t) dr \right] \quad (57)$$

$$\text{这时, } v_0 = \pi [r_e^2 - r_w^2] H \quad (58)$$

若只计算地基中的任一时刻的平均孔压, 则可写为

$$\bar{u}^e(t) = \frac{1}{v_{OD}} \int_0^H dz \int_{r_s}^{r_e} 2\pi r u(r, z, t) dr \quad (59)$$

$$\text{式中: } v_{OD} = \pi [r_e^2 - r_s^2] H \quad (60)$$

在真空预压情况下有

$$u(r, z, t) = -p_0 [1 - e^{-\alpha t}] + \bar{W}(r, z, t) \quad (61)$$

$$\bar{W}(r, z, t) = 2\alpha P_0 \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{M} sm \left(\frac{M}{H} z \right) \cdot \\ \frac{1}{\lambda_1^2 - \alpha} \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) \left[e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t} \right] \quad (62)$$

引入

$$K_1^* = \int_{r_s}^{r_e} r \bar{W}_0(\alpha_{mn} r) dr = \\ \frac{1}{\alpha_{mn}} \left[r_e \bar{W}_0(\alpha_{mn} r_e) - r_s \bar{W}_0(\alpha_{mn} r_s) \right] \quad (63)$$

则由式(58)求得平均孔压:

$$\bar{u}^e(t) = -P_0 [1 - e^{-\alpha t}] + \frac{4\alpha P_0}{r_e^2 - r_s^2} \cdot \\ \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{M^2} K_1^* \frac{1}{\lambda_1^2 - \alpha} \left[e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t} \right] \quad (64)$$

式中: K_1^* 由式(62)计算; M 与其他参数同前; C'_{mn} 由式(42)确定。

(2) 平均固结度 $\bar{U}^e(t)$ 的计算。

定义①设真空预压平均孔压为 $\bar{u}^e(t)$, 则定义其平均固结度

$$\bar{U}^e(t) = \frac{\bar{u}^e(t)}{-P_0 [1 - e^{-\alpha t}]} \quad (65)$$

其计算值为

$$\bar{U}^e(t) = 1 - \frac{4\alpha}{(r_e^2 - r_s^2) [1 - e^{-\alpha t}]} \cdot \\ \sum_{m=0}^{\infty} C'_{mn} \frac{1}{M^2} K_1^* \frac{1}{\lambda_1^2 - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\lambda_1^2 t}] \quad (66)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\pi}{2} + m\pi, (m = 0, 1, 2, \dots) \\ K_1^* &= \frac{1}{\alpha_{mn}} [r_e W_0(\alpha_{mn} r_e) - r_s W_0(\alpha_{mn} r_s)] \\ \lambda_1^2 &= C_v \left(\frac{M}{H} \right)^2 + C_h \alpha_{mn}^2 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

式中各参数及其求法前文均有述及, 在此不再赘述, 或参见文献[1]。根据上述公式, 编制了程序, 对真空预压下的孔压以及固结度进行了计算。

4 真空预压情况下孔压分布解析解算例

由于上述解析解涉及比较复杂的函数, 因此并不能直接求解。本文编制了计算程序, 对一例题进行了计算。

本例题的计算条件如下: 单井影响半径 $r_e = 1.0$ m, 井径 $r_w = 0.05$ m, 井径比 $n = 20$ 。本例题未考虑涂抹影响。土层高度为 15 m, 则 $H/2r_e = 15$ 。土的体积压缩系数 $m_v = 1/2 \text{ MPa}^{-1}$, 砂井与其相同。土的渗透系数为 $k_h = k_v = 1.0 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ 。砂井的渗透系数 $k_w = 1.0 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$ 。

加载条件: -60 kPa 的真空荷载在 $2 \times 10^6 \text{ s}$ 的时间内线性施加上去, 并一直维持。用 $-p_0[1 - e^{-\alpha}]$ 模拟, 取 $\alpha = 0.0001$, 可以较好地模拟理论加载曲线, 如图 2 所示。

应用编制的解析解程序进行了计算。图 3 为在 $z = H/2$ 处超静孔压沿水平向分布随时间变化的规律 (图中 T_h 为时间因子)。由图 3 可见, 离排水井越远, 孔压降低越慢, 即固结得越慢; 随着时间的增加, 各个点的孔压逐渐达到真空度大小。图 4 为 $r = 0.5 \text{ m}$ 处孔压沿竖向分布随时间变化的规律。与图 3 相似, 竖向各点孔压随着时间的增加而减小。由于底面不排水, 因此越接近土层底面, 孔压下降越慢。平均固结度如图 5 所示。同时还用董志良解析解和有限元方法进行了计算, 之间的比较见图 5。从图中可看出, 本文解的结果更接近数值解, 在固结前期介于数值解和董志良解之间, 不过在固结的后期, 三者的固结度就比较接近了。

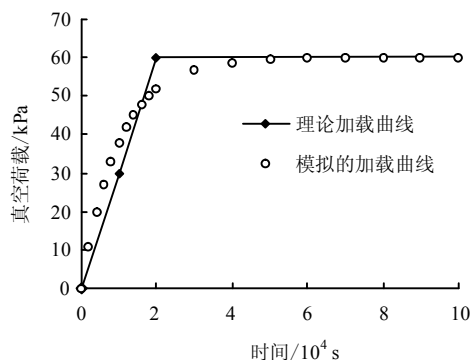


图 2 加载曲线
Fig.2 Loading curves

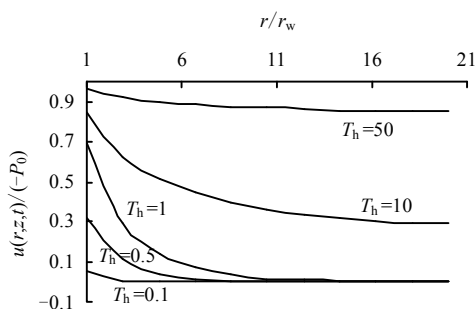


图 3 孔压沿水平向的变化规律
Fig.3 Variation of pore water pressures along the horizontal direction

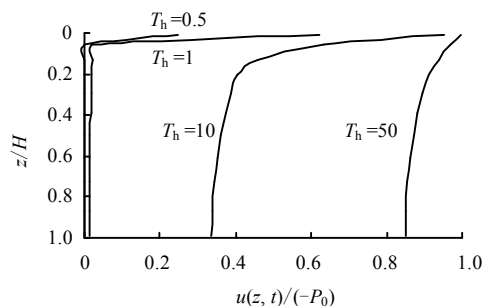


图 4 孔压沿竖向分布及变化规律
Fig.4 Variation of pore water pressures along the vertical direction

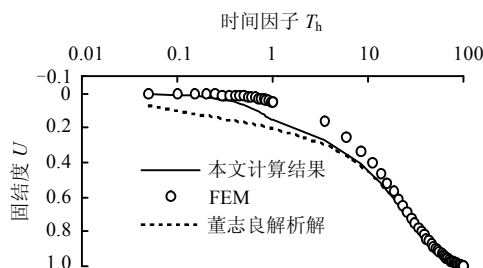


图 5 真空预压固结度计算值
Fig.5 Calculated consolidation degree

5 结 语

本文推导了轴对称等应变情况下的真空预压作用地基的孔压和固结度解析解, 该解析解利用函数 $u = -p_0[1 - e^{-\alpha}]$ 模拟孔压在地表的初始条件, 不仅可以模拟真空荷载的施加过程, 而且还解决了以往真空预压解孔压边界条件和初始条件在地表处的矛盾。此外, 还考虑了涂抹和井阻等因素, 比以往的真空预压解析解更加接近实际工程情况。通过例题与其他解答及数值解进行了验证、比较, 本文解的结果更接近数值解, 证明了该解答的适用性。可进一步将其扩展制成图表, 用于实际工程的设计计算。

参 考 文 献

- [1] 彭劼. 真空-堆载联合预压法加固机理与计算理论研究[博士学位论文 D]. 南京: 河海大学, 2003.
- [2] 张玉国, 谢康和, 王哲, 等. 未打穿砂井地基下卧层固结研究分析[J]. 岩土力学, 2005, 26(11): 1737—1742.
ZHANG Yu-guo, XIE Kang-he, WANG Zhe, et al. Analysis of consolidation of underlying soft layer of ground by partially penetrated sand drain[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(11): 1737—1742.
- [3] 董志良. 真空预压-塑料排水板加固软基固结理论及真空度的研究[硕士学位论文 D]. 南京: 河海大学, 1990.
- [4] 梁昆森. 数学物理方法 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 1980.

版社, 1998: 203—215.